

Homotopía y Clasificación de Solitones Topológicos

Trabajo Final de Métodos de la Física Matemática

Resumen. Este trabajo está construido en dos partes, Teoría de Homotopía y Solitones Topológicos. En la primera parte abordaremos las bases de la Teoría de Homotopía con un aire puramente matemático. Se enunciarán y demostrarán los teoremas necesarios (y un poco más) para su aplicación en la segunda parte. En la segunda parte usaremos los resultados obtenidos para abordar la clasificación de solitones topológicos en dimensiones $d = 1, 2, 3$.

Teoría de Homotopía

Comenzaremos este compendio con una de teorías fundamentales en Matemática y Física Matemática, esto es, **Teoría de Homotopía**. Básicamente la homotopía es una forma de clase de equivalencia entre espacios topológicos.

Homotopía de curvas

Por una curva en un espacio X nos referimos a una función continua $f : I \rightarrow X$ con punto inicial $f(0) = x_0$ y punto final $f(1) = x_1$, donde I es el intervalo unitario $[0, 1]$. Decimos que dos curvas son **homotópicas** si es posible deformar una en la otra de forma continua. Una definición más precisa es la siguiente:

Definición 1 (Homotopía). Dos curvas $f_0, f_1 : I \rightarrow X$ con puntos iniciales y finales iguales se dicen homotópicas si existe una función continua $F : I \times I \rightarrow X$ tal que $F(t, 0) = f_0(t)$, $F(t, 1) = f_1(t)$, $F(0, s) = x_0$ y $F(1, s) = x_1$.

Otra forma de pensarlo es suponiendo que existe una familia de funciones parametrizadas por t , $F_t : I \rightarrow X$ tales que

1. Los extremos $f_t(0) = x_0$ y $f_t(1) = x_1$ son independientes de t .
2. $F(t, s) = f_t(s)$ es un mapeo continuo.

Es fácil comprobar que la relación de homotopía entre dos curvas es una clase de equivalencia. La *reflectividad* $f \simeq f$ es evidente ya que “ambas” curvas son homotópicas por la **homotopía constante** $F_t(s) = f, \forall s \in I$. La *simetría* también es evidente ya que si $f_0 \simeq f_1$ entonces $f_1 \simeq f_0$ usando la **homotopía inversa** F_{1-t} . Para la *transitividad*, si $f_0 \simeq f_1$ usando F_t y si $f_1 \simeq f_2$ usando la homotopía G_t , entonces definamos la siguiente homotopía entre f_0 y f_2 :

$$H_t(s) = \begin{cases} F_t(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G_t(2s - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Es claro que $H_t(0) = x_0$ y $H_t(1) = x_1$. Faltaría comprobar que $H(t, s) = H_t(s)$ es una función continua. Esto no es muy difícil de comprobar, como $H(t, s) = F(t, 2s)$ para $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ por lo tanto es continua en $I \times [0, 1/2]$. El mismo razonamiento se aplica para el intervalo $I \times [1/2, 1]$. Entonces, $H(t, s)$ es una función continua en $I \times I$.

Dadas dos curvas $f, g : I \rightarrow X$ tales que $f(1) = g(0)$, existe una **composición** o **curva producto** $f \cdot g$ que atraviesa primero f y luego g definida como

$$f \cdot g(s) = \begin{cases} f_t(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g_t(2s - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

La clase de equivalencia de una curva f bajo la relación de equivalencia de homotopía se denota como $[f]$ y se denomina **clase de homotopía** de f .

De ahora en adelante, estamos interesados en curvas tales que el punto inicial y el punto final sean el mismo punto. Estas curvas son llamadas *bucles* o *loops* y el punto inicial (y final) es llamada **punto base**.

El grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$

El grupo fundamental es el conjunto de todas las clases de homotopía $[f]$ de bucles $f : I \rightarrow X$ en el punto base x_0 junto con la operación de composición $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$.

A estas alturas resulta natural preguntarse por la dependencia del grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ en la elección del punto base x_0 . Consideremos $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(X, x_1)$, y sea $h : I \rightarrow X$ una curva de x_0 a x_1 . El camino inverso $\bar{h} = h(1 - s)$ de x_1 a x_0 . Para un bucle f con base en x_1 podemos asociar el bucle $h \cdot f \cdot \bar{h}$ con base en x_0 . Definimos el mapeo de **cambio de base** $\beta_h : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ como $\beta_h[f] = [h \cdot f \cdot \bar{h}]$.

Teorema 1 (Change of basepoint is an isomorphism). El mapeo $\beta_h : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ es un isomorfismo.

Demostración 1. Para demostrar que β_h es un isomorfismo entre los grupos fundamentales, primero probemos que es un homomorfismo y luego mostremos que β_h tiene un mapeo inverso. Sean $f, g \in \pi_1(X, x_1)$, entonces $\beta_h[f \cdot g] = [h \cdot (f \cdot g) \cdot \bar{h}] = [h \cdot f \cdot \bar{h} \cdot h \cdot g \cdot \bar{h}] = [h \cdot f \cdot \bar{h}] [h \cdot g \cdot \bar{h}] = \beta_h[f] \beta_h[g]$. El mapeo $\beta_{\bar{h}}$ es la inversa de β_h pues $\beta_h \beta_{\bar{h}}[f] = \beta_h[\bar{h} \cdot g \cdot h] = [h \cdot (\bar{h} \cdot g \cdot h) \cdot \bar{h}] = [f]$ y además $\beta_{\bar{h}} \beta_h[f] = [f]$.

Una consecuencia inmediata de este teorema es que si todos los puntos de un espacio X se pueden unir por curvas, es decir, si es un espacio conexo (**path-connected**), entonces $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X, x_1)$ para cualquiera puntos x_0, x_1 . En este contexto, no es necesario indicar un punto base, entonces se denotará como $\pi_1(X)$.

Recordemos la definición de un espacio **simplemente conexo**: un espacio X es simplemente conexo si es conexo por caminos y además todo bucle se puede contraer continuamente a un punto. Con esta información probemos el siguiente teorema

Teorema 2 (Simply connected $\rightarrow \pi_1(X) = 0$). Si X es un espacio simplemente conexo entonces su grupo fundamental es trivial, $\pi_1(X) = 0$.

Demostración 2. Como un espacio simplemente conexo es conexo por caminos entonces sabemos que todos los grupos fundamentales con distintos puntos bases son isomorfos entre sí. Y como todo

bucle se puede contraer a un punto entonces todo bucle es homotópico a un punto. Entonces, la única clase de homotopía es la de la homotopía constante. Entonces el grupo fundamental sólo tiene un elemento y es el trivial.

Es fácil generalizar la relación de homotopía de curvas y bucles a mapeos arbitrarios. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ mapeos continuos. Si existe un mapeo continuo $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$, se dice que f es **homotópica** a g y F es la **homotopía** entre f y g .

Definición 2 (Tipo de homotopía). Decimos que dos espacios topológicos X e Y son del mismo **tipo de homotopía**, denotado como $X \simeq Y$, si existen mapeos continuos $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \cdot g \simeq id_Y$ y $g \cdot f \simeq id_X$. Al mapeo f se le denomina **equivalencia de homotopía** y a g , su **homotopía inversa**.

Una de las propiedades más remarcables de espacios que son del mismo tipo de homotopía es que tienen el mismo grupo fundamental. Este resultado se resume en el siguiente teorema

Teorema 3 (Same homotopy type \rightarrow Isomorphic fundamental groups). Sean X y Y espacios topológicos del mismo tipo de homotopía. Si $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia de homotopía, $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo a $\pi_1(Y, f(x_0))$.

Demostración 3. Como X e Y son espacios del mismo tipo de homotopía entonces existen la equivalencia de homotopía $f : X \rightarrow Y$ y su homotopía inversa $g : Y \rightarrow X$. Estos mapeos inducen homomorfismos entre los grupos fundamentales (Figura 1)

$$\begin{aligned} f_{\#} &: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0)) \\ g_{\#} &: \pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \end{aligned}$$

cuya acción está definida componiendo $f_{\#}([\alpha]) = [f \cdot \alpha]$ para $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$. Mostremos que ambos son, en efecto, homomorfismos. Y aún más, probemos que uno es la inversa del otro, por lo tanto, ambos son isomorfismos. Es claro que para dos mapeos α, β , $f_{\#}([\alpha \cdot \beta]) = [f \cdot \alpha \cdot \beta] = [(f \cdot \alpha) \cdot (f \cdot \beta)] = [f \cdot \alpha][f \cdot \beta] = f_{\#}([\alpha])f_{\#}([\beta])$, idem para el homomorfismo $g_{\#}$. Ahora probemos que ambos homomorfismos son inversos: $f_{\#}g_{\#}[\alpha] = f_{\#}[g \cdot \alpha] = [f \cdot (g \cdot \alpha)] = [(f \cdot g) \cdot \alpha] = [id_Y \cdot \alpha] = [\alpha]$ y $g_{\#}f_{\#}[\alpha] = g_{\#}[f \cdot \alpha] = [g \cdot (f \cdot \alpha)] = [(g \cdot f) \cdot \alpha] = [id_X \cdot \alpha] = [\alpha]$. Por lo tanto, $f_{\#}$ es un isomorfismo entre los grupos fundamentales.

Un corolario que sigue inmediatamente del teorema anterior es que el grupo fundamental es un invariante ante homomorfismos, es decir, es un **invariante topológico**. De esta forma, los grupos fundamentales son una forma de clasificar espacios topológicos de una manera menos estricta que un homomorfismo. Se sigue que si dos espacios topológicos tienen grupos fundamentales distintos entonces no son homomorfos. En esta propiedad importante reside una de las aplicaciones más importantes de la homotopía en física. En física se usan no para clasificar espacios si no para clasificar espacios de soluciones o espacios de configuraciones.

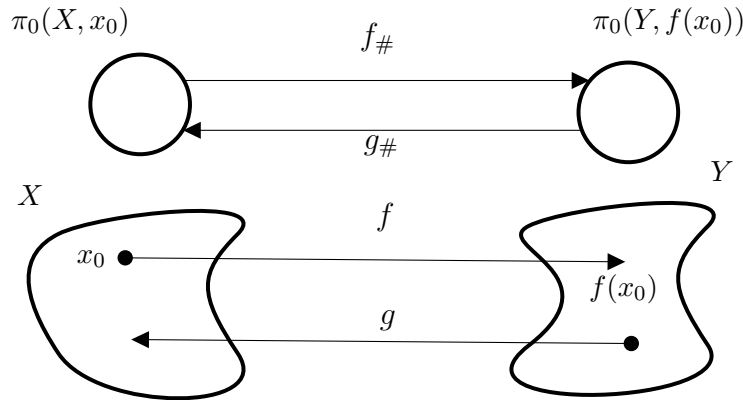


Figura 1. Una descripción pictórica del Teorema 3. Los mapeos f y g inducen homomorfismos entre los grupos fundamentales.

En la siguiente sección usaremos estos resultados para hallar el grupo fundamental del círculo.

Grupos fundamentales de ciertos espacios interesantes

En esta sección estudiaremos los grupos fundamentales de distintos espacios, veremos sus aplicaciones en física y lo más importante se dejarán las herramientas para calcular grupos fundamentales de espacios más complicados.

El grupo fundamental de la circunferencia $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

Para abordar el problema de calcular el grupo fundamental de la circunferencia S^1 , desarrollaremos una herramienta poderosa que permitirá calcular grupos fundamentales de espacios complicados. Esta herramienta son los **espacios de cubrimiento**.

Definición 3 (Espacios de cubrimiento). Dado un espacio topológico X , un espacio de cubrimiento para X , es un par (C, p) donde C es otro espacio topológico y $p : C \rightarrow X$ es un mapeo continuo. La **función de cubrimiento** p debe satisfacer la siguiente condición: para todo punto $x \in X$, existe una vecindad U de x tal que la preimagen $p^{-1}(U)$ es la unión disjunta de conjuntos abiertos cada uno de los cuales es mapeado homeomórficamente a U por p .

También debemos introducir el concepto de un **levantamiento** (*lifting*) de un mapeo continuo debido a otro mapeo continuo:

Definición 4 (Levantamiento). Un **levantamiento** de un mapeo $f : X \rightarrow Y$ por un mapeo $p : \tilde{X} \rightarrow X$ es un mapeo $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ tal que $p \cdot \tilde{f} = f$.

Se puede pensar a \tilde{f} como una curva en \tilde{X} a la cual la podemos “bajar” con la función p a una curva f en Y . Es por eso que \tilde{f} es un levantamiento de f (ver Figura 2).

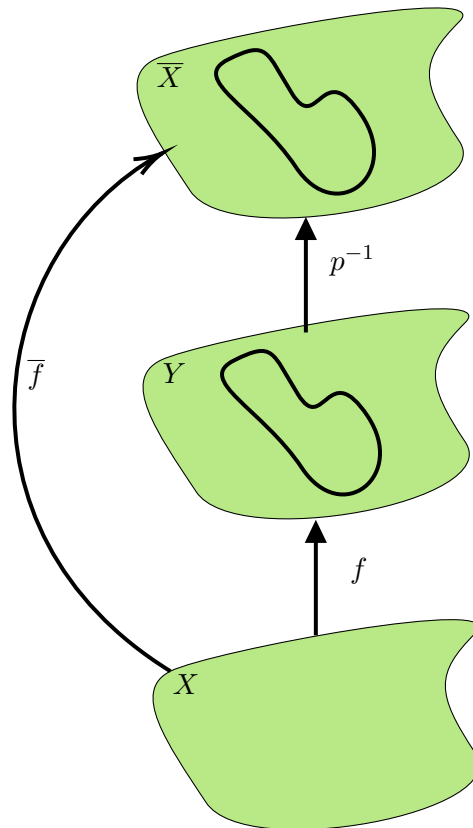


Figura 2. Descripción de un levantamiento de un mapeo f . La imagen de f define una "cirva" en Y . A su vez la imagen de p^{-1} define una curva en \bar{X} .

Conviene pensar en un ejemplo antes de que nos hundamos en lo abstracto de este concepto. Mostremos que \mathbb{R} es el espacio de cubrimiento de S^1 . Considere el siguiente mapeo $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dado por $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Esta es una función de cubrimiento que "enrolla" a la recta real alrededor del círculo. De este modo (\mathbb{R}, p) es un espacio de cubrimiento de S^1 .

Ahora pensemos como introducir el concepto de un levantamiento. Sea el mapeo $\omega_n(s) = (\cos(2\pi ns), \sin(2\pi ns))$, $n \in \mathbb{Z}$, es claro que ω_n es la composición de $p \cdot \tilde{\omega}_n$ donde $\tilde{\omega}_n(s) = ns$. Entonces, $\tilde{\omega}_n$ es un levantamiento de ω_n por p .

Ahora siguen dos propiedades de espacios de cubrimiento que enunciaremos sin demostración¹.

Teorema 4 (Path lifting property). Para todo camino $f : I \rightarrow X$ con punto inicial en $x_0 \in X$ y cada $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ existe un único levantamiento $\tilde{f} : I \rightarrow X$ con punto inicial en \tilde{x}_0 .

Teorema 5 (Homotopy lifting property). Para cada homotopía $f_t : I \rightarrow X$ de caminos con punto inicial en x_0 y cada $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ existe una única homotopía levantada $\tilde{f}_t : I \rightarrow X$ de caminos con punto inicial en \tilde{x}_0 .

Con estas herramientas en las manos podemos enunciar y demostrar el siguiente teorema

Teorema 6 ($\pi_1(S^1) \approx \mathbb{Z}$). El grupo fundamental del círculo es isomorfo a \mathbb{Z} .

¹La demostración de ambos teoremas se puede encontrar en la Sección 1.3 de [1]

Demostración 4. Elijamos un punto base de S^1 , por ejemplo, $x_0 = (1, 0)$, además, sea $f : I \rightarrow S^1$ un bucle con punto base en x_0 . Recordemos que (\mathbb{R}, p) es un espacio de cubrimiento de S^1 , entonces, por el Teorema 4 existe un levantamiento \tilde{f} de f por p con punto inicial en $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0) = \{n, n \in \mathbb{Z}\}$. Elijamos $x_0 = 0$ y el punto final $x_1 = m \in \mathbb{Z}$ algún entero. Es muy claro, que este camino \tilde{f} es homotópico al levantamiento de ω , $\tilde{\omega}_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ definido como $\tilde{\omega}_n(s) = ns$. Entonces, $\tilde{f} \simeq \tilde{\omega}_n$. Por el Teorema 5, sabemos que este levantamiento de homotopía $[\tilde{f}]$ es único y está asociado a la homotopía $[f]$, análogamente, $[\tilde{\omega}_n] \rightarrow [\omega_n]$. Por lo tanto, concluimos que $[f] \simeq [\omega_n]$. Acabamos de demostrar que la clase de homotopía de bucles con base en el punto x_0 es la clase de bucles $[\omega_n]$ que está determinado únicamente por un entero $n \in \mathbb{Z}$ que indica cuantas veces un bucle da vueltas alrededor del círculo. Además, como S^1 es conexo por caminos, este resultado se extiende a todos los puntos del círculo.

Una propiedad importante de los grupos fundamentales se manifiesta cuando consideramos espacios productos.

Teorema 7 (Fundamental group of product space is the product of fundamental groups). $\pi_1(X \times Y) \approx \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$ si X e Y son conexos por caminos.

Demostración 5. Sean $\alpha_1 : I \rightarrow X$ y $\alpha_2 : I \rightarrow Y$ dos bucles. Estos bucles definen unívocamente un bucle $\alpha : I \times I \rightarrow X \times Y$ definido como $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Además, definamos el homomorfismo $\phi : \pi_1(X \times Y) \rightarrow \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$ definido como $\phi([\alpha]) = ([\alpha_1], [\alpha_2])$. Por unicidad del bucle α , el homomorfismo tiene una inversa. Por lo tanto es un isomorfismo.

El grupo fundamental del toro $\mathcal{T} = S^1 \times S^1$

Utilizando el teorema anterior es fácil obtener el grupo fundamenta del toro \mathcal{T} :

$$\pi_1(\mathcal{T}) \approx \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Los bucles en el toro están descritos por dos enteros (m, n) que indican cuantas vueltas dan sobre cada una de las dos circunferencias principales (Figura 3).

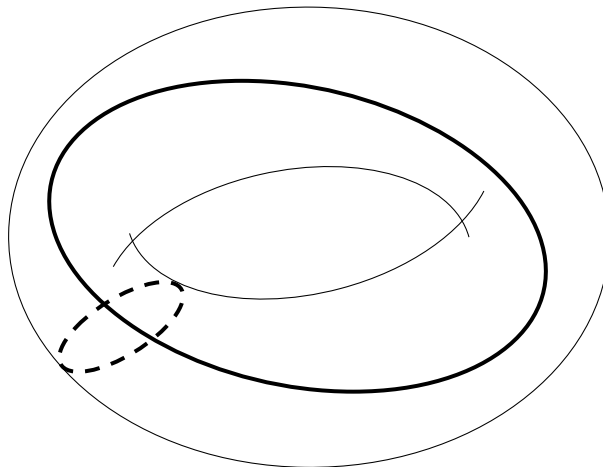


Figura 3. Imagen de un toro mostrando sus dos circunferencias principales.

Grupos de Homotopía de orden n

Para motivar el estudio de grupos de homotopía de orden mayor a 1, hallemos el grupo fundamental de S^2 y luego generalicemos para $S^n, n \geq 2$. Es un hecho que la esfera es una superficie simplemente

conexa, es decir, que todo bucle se puede contraer continuamente a un punto. Por este hecho fundamental, podemos concluir que el grupo fundamental de S^2 es trivial. Para demostrar el caso general, uno puede demostrar que S^n es simplemente conexo para $n \geq 2$ ² o usar el siguiente lema:

Lema 1. Si un espacio topológico X es la unión de un conjunto de abiertos A_α conexos por caminos cada uno conteniendo el punto base $x_0 \in X$ y si cada intersección $A_\alpha \cap A_\beta$ es conexa por caminos, entonces, todo bucle en X con punto base x_0 es homotópico a un producto de bucles cada uno contenido en un sólo A_α .

Lo que este lema nos quiere decir, es que tratemos de encontrar este conjunto de conjuntos abiertos conexos por caminos, de modo que el grupo fundamental es el producto de grupos fundamentales de estos conjuntos. El trabajo se hace mucho más fácil, si además elegimos estos conjuntos que sean homeomorfos a espacios cuyos grupos fundamentales son conocidos. Con este lema en la mano, demostremos el siguiente teorema:

Teorema 8 (Fundamental group of spheres). El grupo fundamental de S^n es trivial para $n \geq 2$.

Demostración 6. Expresemos a S^n como la unión de dos conjuntos abiertos A_1 y A_2 cada uno de los cuales sea homeomorfo a \mathbb{R}^n y tales que $A_1 \cap A_2$ sea homeomorfa a $S^{n-1} \times \mathbb{R}$. Observemos que $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ es conexo por caminos para $n \geq 2$. Esto es fácil de ver: el caso $n = 1$ corresponde a $(\pm 1, x), x \in \mathbb{R}$ la cual no es conexa por caminos porque no existe un camino en ese espacio que una los puntos $(1, 1)$ y $(-1, 1)$ por ejemplo, el caso $n = 2$ corresponde al cilindro infinito $S^1 \times \mathbb{R}$ que si es conexo. El caso general lo podemos pensar como un cilindro en $n + 1$ dimensiones. Elijamos, un punto base $x_0 \in A_1 \cap A_2$. Estamos en condiciones de aplicar el lema, entonces, todo bucle en S^n con punto base en x_0 es homotópico a un producto de bucles en A_1 o A_2 . Como $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$, entonces $\pi_1(A_1)$ y $\pi_1(A_2)$ son triviales también. Por lo tanto, $\pi_1(S^n) = 0$.

El grupo fundamental no puede distinguir, por ejemplo, entre S^2 y S^3 . El grupo fundamental no basta para clasificar estos espacios. Es por eso que introducimos los grupos de homotopía de mayor orden. Estos están definidos de una manera análoga al grupo fundamental: ahora consideramos a los bucles como mapeos de un cubo n -dimensional I^n a un espacio X , $f : I^n \rightarrow X$ con $f(\partial I^n) = x_0$, los elementos del grupo de homotopía de orden n , $\pi_n(X, x_0)$, son clases de homotopía de estos mapeos.

Solitones Topológicos

En esta sección veremos como podemos usar lo aprendido sobre Teoría de Homotopía para descubrir si ciertas teorías pueden admitir soluciones solitónicas asociadas a cierta cantidad topológica, llamada carga topológica. En las secciones anteriores vimos la importancia del punto base para definir una estructura homotópica en cierto espacio, pero en el contexto de la Teoría de Campos el punto base no juega ningún rol y se omitirá.

Topología y Solitones

Nuestro propósito será elucidar los aspectos topológicos de campos definidos en el espacio plano \mathbb{R}^n . En ausencia de más estructura, los campos que son lineales son topológicamente triviales pues,

²Una demostración se puede encontrar en *Introduction to Topology* de Munkres.

considere un campo $\phi(x)$, uno puede reemplazar este campo por $(1 - \tau)\phi(x)$ con $0 \leq \tau \leq 1$ sin cambiar la dinámica de la teoría. Pero esto define una homotopía entre $\phi(x)$ ($\tau = 0$) y $\phi(x) = 0$ ($\tau = 1$). El caso no lineal es un poco distinto. Suponga un campo $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$, como \mathbb{R}^n es contraíble a un punto (el grupo fundamental es trivial), el valor que toma el campo en ese punto es un invariante topológico que vive en la variedad Y , definiendo un grupo fundamental de configuraciones de campo no triviales en Y que están clasificadas por $\pi_0(Y)$.

La definición de un solitón entendida en el contexto de la física de partículas difiere de la definición en hidrodinámica. La definición que adoptaremos es la siguiente

Definición 5 (Solitón). Un solitón es una solución de las ecuaciones de movimiento de cierta teoría que es estática (independiente del tiempo), estable, localizada en el espacio y de energía finita. [3]

La condición de que los solitones tengan energía finita también se escribe como que la densidad de energía decae rápidamente cuando $\rho \rightarrow \infty$, donde ρ es la distancia al origen. Esta condición impone condiciones de frontera en los campos, cruciales para su respectiva clasificación.

Como se dijo en la parte introductoria a esta sección, algunos solitones pueden estar asociados a cantidades topológicas llamadas “cargas topológicas”, que a su vez son invariantes topológicos. Estos son los llamados **solitones topológicos**, y son los que estudiaremos en este trabajo.

Consideremos un multiplete de n campos escalares $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$. Definimos la energía como

$$E = \int \left(\frac{1}{2} \nabla \phi_k \cdot \nabla \phi_k + U(\phi_1, \dots, \phi_n) \right) d^d x.$$

Asumamos que el potencial $U(\phi_1, \dots, \phi_n)$ toma un valor mínimo $U_{min} = 0$ en una subvariedad $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$, llamada **variedad de vacío**. Como dijimos que la densidad de energía decae rápidamente para $\rho \rightarrow \infty$, entonces el campo ϕ debe tomar valores en \mathcal{V} para asegurar que la densidad de energía se anule rápidamente en infinito. Entonces, una dada configuración de campos define un mapeo de S_∞^{d-1} a \mathcal{V} . Donde S_∞^{d-1} es la esfera en infinito en \mathbb{R}^n .

Topológicamente, no hay diferencia si sólo nos ocupamos del comportamiento asintótico del campo. Entonces, trabajaremos con campos en el infinito

$$\phi^\infty : S_\infty^{d-1} \rightarrow \mathcal{V}$$

En una teoría lineal, si tenemos dos configuraciones de campos ϕ y $\bar{\phi}$ con comportamiento asintótico ϕ^∞ y $\bar{\phi}^\infty$ distinto, son aún homotópicas si ϕ^∞ es homotópico a $\bar{\phi}^\infty$. Es decir, el comportamiento de ϕ en el infinito está determinado por la clase de homotopía de ϕ^∞ , la cual es un elemento de $\pi_{d-1}(\mathcal{V})$.

Consideremos $d = 1$. En este caso los campos son mapeos de $S_\infty^0 = \{-\infty, \infty\}$ a \mathcal{V} . Los componentes de \mathcal{V} son clasificados por $\pi_0(\mathcal{V})$. Para ilustrar este caso consideramos el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - V(\phi)$$

Y elegiremos el potencial cuártico

$$V(\phi) = \frac{1}{4} \lambda \left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2$$

Los mínimos del potencial son

$$\phi_0^{(\pm)} = \pm \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}$$

Como se puede ver, la variedad de vacío son dos puntos aislados, por lo que el análisis de la homotopía no es complicado. Al haber dos vacíos topológicamente distintos los campos ϕ pueden tener cuatro comportamientos en el infinito. Por ejemplo, podemos tener un campo que tome el valor de $\phi_0^{(+)}$ en $+\infty$ y $\phi_0^{(-)}$ en $-\infty$ como también podemos tener un campo que tome los valores opuestos al anterior. En general, los campos están descritos por dos números $(v_1, v_2) \in \pi_0(\mathcal{V}) \times \pi_0(\mathcal{V}) = \{\phi_0^{(\pm)}\} \times \{\phi_0^{(\pm)}\}$. Existe también el caso en que un campo tome el mismo valor en infinito ($v_1 = v_2$), este caso corresponde al vacío. Hallemos las ecuaciones de movimiento para encontrar una forma funcional de este solitón

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \phi)} \right) &= 0 \\ -V'(\phi) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) &= 0 \\ \phi'' - \lambda \phi^3 + m^2 \phi &= 0 \end{aligned}$$

Las soluciones a esta ecuación diferencial no lineal de segundo orden son

$$\phi(x) = \pm \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}} \tanh \left(\frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right) \quad (1)$$

Las configuraciones de campo en el infinito están caracterizadas por $\pi_0(\mathcal{V})$ cuyos elementos son los valores del campo en $\{\infty, -\infty\}$, estos son

$$\begin{aligned} \phi_+^\infty &= +\sqrt{\frac{m^2}{\lambda}} \\ \phi_-^\infty &= -\sqrt{\frac{m^2}{\lambda}} \end{aligned}$$

Como dijimos al inicio, el valor del campo en infinito es un invariante topológico. Con estos datos, uno puede definir una carga topológica conservada que no está asociada a ninguna simetría del Lagrangiano.

$$Q = \phi_+^\infty - \phi_-^\infty = 2\sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}$$

A esta solución solitónica (1) en una dimensión se le denomina **kink** y corresponde a un oscilador anarmónico en 1 + 1 dimensiones.

En el caso no lineal, los campos ahora son mapeos de \mathbb{R} a una cierta variedad cerrada Y , $\phi: \mathbb{R} \rightarrow Y$. Los solitones topológicos en \mathbb{R} , con ϕ un campo no lineal son llamados **kinks no lineales**. El ejemplo clásico de un kink no lineal es el **modelo seno de Gordon**. Este está descrito por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2}(\phi')^2 - \frac{\alpha}{\beta^2}(1 - \cos \beta \phi)$$

Los mínimos del potencial son

$$\phi_0 = \frac{2\pi}{\beta} n$$

No es difícil ver que la variedad de vacío es $\mathcal{V} \simeq \mathbb{Z}$. Entonces, los solitones son caracterizados por un entero $Q \in \pi_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Las ecuaciones de movimiento son llamadas **ecuaciones seno de Gordon** y tienen por solución para $Q = 1$

$$\phi(t, x) = \frac{4}{\beta} \tan^{-1} \exp(\sqrt{\alpha} x)$$

El caso $n = -1$ puede ser escrito como

$$\phi(t, x) = -\frac{4}{\beta} \tan^{-1} \exp(\sqrt{\alpha} x)$$

Y, obviamente, $n = 0$ corresponde a soluciones homotópicas al vacío. Pero que pasa para $|n| > 1$ estas no pueden ser halladas como soluciones estáticas, esto es porque los solitones “interactúan” (las ecuaciones de movimiento que los definen son no lineales) entonces una configuración con más de un soliton no puede ser independiente del tiempo. A pesar de esto, soluciones *multisolitónicas* existen y son halladas con ayuda de la **transformación de Bäcklund**[ref].

Observación 1. A pesar de que dijimos que el modelo seno de Gordon era no lineal, no se pudo evidenciar en el tratamiento anterior, ya que hicimos el mismo análisis que en el caso lineal. Esto es porque interpretamos este modelo como un campo lineal con un potencial periódico, sin embargo, otra interpretación es posible: podemos tomar al campo ϕ como que toma valores en el círculo, entonces el potencial tomaría un único mínimo en ese círculo. De esta manera la variedad de vacío es una variedad cerrada. Esto hace que el kink del modelo seno de Gordon sea un kink no lineal.

Ahora veamos que pasa en $d = 2$. Los campos son mapeos de S^1_∞ a \mathcal{V} . Los campos son caracterizados por elementos del grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{V})$. Las configuraciones de campo que corresponden a elementos no triviales $\pi_1(\mathcal{V})$ son denominados **vórtices**. Primero consideremos el modelo más simple en que $\mathcal{V} = S^1$. Para esto, consideremos un campo escalar $\phi(x)$ con el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - V(\phi)$$

Con $V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - \phi_0^2)^2$. Las configuraciones de vacío son

$$\phi(x) = \phi_0 e^{i\alpha}$$

donde α es un real que especifica un cierto ángulo en el círculo. Entonces, las configuraciones del campo se pueden escribir como

$$\phi(r, \theta) = \phi_0 U(\theta)$$

, donde $U(\theta) = U(\theta + 2\pi n)$ de modo que ϕ sea univaluada. Un ejemplo de estas funciones $U(\theta)$ es $e^{in\theta}$. Queremos encontrar soluciones de energía finita de las ecuaciones de campo con la condición de frontera

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r, \theta) = \phi_0 U(\theta)$$

Proponemos el ansatz

$$\phi(r, \theta) = \phi_0 f(r) e^{in\theta}$$

donde además $f(\infty) = 1$ y $f(0) = 0$ de modo que $\nabla\phi(r, \theta)$ esté bien definida en $r = 0$. Veamos que aunque este ansatz satisface las ecuaciones de movimiento, no tiene energía finita:

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \phi_0 \left[f'(r) \hat{\mathbf{r}} + in \frac{f(r)}{r} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right] e^{in\theta} \\ \implies |\nabla\phi|^2 &= \phi_0^2 \left[f'(r)^2 + n^2 \frac{f(r)^2}{r^2} \right] \end{aligned}$$

Entonces, la energía cinética cuando $r \rightarrow \infty$

$$K = \int d^2x |\nabla\phi|^2 \sim 2\pi n^2 \phi_0^2 \int_0^\infty \frac{dr}{r}$$

diverge logarítmicamente. Este resultado es parte de un resultado aún más general llamado **Teorema de Derrick**. Este teorema impide la existencia de solitones independientes del tiempo, con energía finita y localizados en más de una dimensión, usando sólo campos escalares. Sin embargo, como anunciamos al inicio, *sí* existen solitones localizados en dos dimensiones, llamados vórtices. Esto se logra introduciendo campos de gauge (es una de las formas de evadir este teorema) como veremos a continuación:

Consideremos el modelo de **Brout-Englert-Higgs abeliano (ABEH)**. Este modelo fue propuesto en 1964 como una teoría en la cual mesones vectoriales podían adquirir una masa sin perder la invarianza de gauge. Aunque nuestro objetivo aquí no es ver el mecanismo por el cuál adquieren masa (Mecanismo de Higgs), más bien, queremos ver como las soluciones son caracterizadas por el grupo fundamental de la variedad de vacío. Comencemos escribiendo el lagrangiano ABEH

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - V(|\phi|)$$

Donde ϕ es un campo complejo. Tomamos el potencial

$$V(|\phi|) = \lambda(|\phi|^2 - \phi_0^2)^2$$

El claro que el mínimo del potencial se alcanza cuando $\langle \phi \rangle = \phi_0 e^{i\alpha}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ especifica un ángulo en la circunferencia S^1 . Tenemos todo un conjunto de vacíos degenerados que forman la variedad de vacío, que tiene la topología de S^1 . Entonces, las configuraciones de campo son caracterizadas por un número entero $n \in \pi_1(\mathcal{V}) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Este número es conocido como *winding number* del vórtice.

Después de más de 20 años de la publicación del modelo ABEH [14, 15], Nielsen y Olesen [7] mostraron que este lagrangiano admite soluciones tipo vórtice en analogía con las líneas vorticiales que aparecen en un superconductor tipo 2 [16]. Para ver estas soluciones halleemos las ecuaciones de movimiento. En este caso las variables dinámicas son A_μ y ϕ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) &= 0 \\ \frac{1}{2} ie (\phi \partial^\nu \phi^* - \phi^* \partial^\nu \phi) + e^2 A^\nu |\phi|^2 - \partial_\mu F^{\mu\nu} &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) &= 0 \\ ieA^\mu (\partial_\mu \phi^* - ieA_\mu \phi^*) - \frac{\partial V}{\partial \phi} &= \partial_\mu (\partial^\mu \phi^* - ieA^\mu \phi^*) \\ (\partial^\mu + ieA^\mu) D_\mu \phi &= -\frac{\partial V}{\partial \phi^*} \\ D^\mu D_\mu \phi &= \frac{\partial V}{\partial \phi^*}\end{aligned}$$

Nielsen y Olesen consideraron soluciones estáticas con el gauge $A_0 = 0$, además buscaron soluciones cilíndricamente simétricas y propusieron el siguiente ansatz

$$\begin{aligned}\phi &= f(\rho) e^{-iN\psi}, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \vec{A} &= -\hat{\theta} \frac{A(\rho)}{\rho}\end{aligned}$$

Donde las funciones $A(\rho)$ y $f(r)$ tienen los siguientes comportamientos

$$\begin{aligned}f(0) &= A(0) = 0 \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} f(\rho) &= \phi_0 \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} A(\rho) &= -\frac{N}{e}\end{aligned}$$

Insertando el ansatz en las ecuaciones de movimiento se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\frac{d^2 A}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dA}{d\rho} - e(N + eA)f^2 &= 0 \\ \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} - \frac{(N + eA)^2}{\rho^2} f - 2\lambda(f^2 - \phi_0^2)f &= 0\end{aligned}$$

Las ecuaciones se tienen que resolver numéricamente, sin embargo, uno puede encontrar soluciones analíticas del comportamiento asintótico de estas soluciones. Referimos al paper de Schaposnik y de Vega [schapo] donde muestran una solución analítica a estas ecuaciones cuando las componentes del tensor de energía momento $T_{\rho\rho}(\rho) = T_{\theta\theta}(\rho) = 0$. Otra solución analítica se encuentra estableciendo un límite de la energía del vórtice (límite de Bogomol'nyi).

Uno puede aplicar un boost de Lorentz a un solitón y este puede moverse, entonces, podemos interpretar a los solitones como partículas.

En tres dimensiones, la solución de Nielsen-Olesen también es llamada *cuerda de Nielsen-Olesen* o *cuerda de gauge*. Estas son estructuras localizadas en dos dimensiones y extendida en otra. Son utilizadas en teoría unificadas y se plantea que pudieron existir en el universo temprano. En ese contexto son llamadas *cuerdas cósmicas* [13].

Pasemos al caso $d = 3$. Las configuraciones de campos son mapeos $\phi : S_\infty^2 \rightarrow \mathcal{V}$. Las clases de homotopía de campos lineales son elementos del grupo $\pi_2(\mathcal{V})$. El ejemplo no trivial más simple es cuando $\mathcal{V} = S^2$, en ese caso $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$, las configuraciones de campo están determinadas por un entero, llamado *número monopolar*. Las soluciones solitónicas correspondientes son denominadas

monopolos. Como consecuencia del Teorema de Derrick no podemos obtener soluciones de energía finita a menos que introduzcamos campos de gauge. Entonces, considere el siguiente lagrangiano con simetría de gauge $SU(2)$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu a}F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2}(D^\mu\phi)^a(D^\mu\phi)^a - V(\phi)$$

Donde ϕ es un elemento del álgebra de $SU(2)$ en la representación adjunta y

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e\epsilon_{abc}A_\mu^b A_\nu^c \\ (D_\mu\phi)^a &= \partial_\mu\phi^a + e\epsilon_{abc}A_\mu^b\phi^c \end{aligned}$$

Esta teoría es conocida como **modelo de Georgi-Glashow electrodébil**, que fuera alguna vez considerado como alternativa para modelar las interacciones electrodébiles, sin embargo, hoy ya no es considerado por no predecir el bosón Z^0 . Consideramos a $V(|\phi|)$ como el potencial de Higgs que vimos en el caso del vórtice. Sabemos que el campo tiene una configuración de vacío que rompe, en este caso, la simetría $SU(2)$ en $U(1)$.

Para observar como el número monopolar se relaciona con el monopolo mismo, hallemos lo que en esta teoría es el campo magnético. Elegimos un gauge en el que la configuración de vacío “apunta” en la dirección z . Es decir,

$$\phi_0^a = v\delta^{a3}$$

En este gauge, el tensor de campo es

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3$$

Podemos construir una expresión invariante de gauge del tensor electromagnético que se reduzca a la expresión anterior en este gauge. 't Hooft [] encontró la expresión correcta como

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a \hat{\phi}^a - \frac{1}{e}\epsilon_{abc}\hat{\phi}^a D_\mu\hat{\phi}^b D_\nu\hat{\phi}^c$$

donde $\hat{\phi}^a = \frac{\phi^a}{|\phi|}$. Usemos la definición de $F_{\mu\nu}$ y de D_μ para verificar que, en efecto, $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ se reduce a $F_{\mu\nu}$ cuando usamos este gauge

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mu\nu} &= \left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e\epsilon_{abc}A_\mu^b A_\nu^c\right)\hat{\phi}^a - \frac{1}{e}\epsilon_{abc}\hat{\phi}^a \left(\partial_\mu\hat{\phi}^b + e\epsilon_{bjk}A_\mu^j\hat{\phi}^k\right) \left(\partial_\nu\hat{\phi}^c + e\epsilon_{cmn}A_\mu^m\hat{\phi}^n\right) \\ &= \hat{\phi}^a\partial_\mu A_\nu^a - \hat{\phi}^a\partial_\nu A_\mu^a + e\epsilon_{abc}\hat{\phi}^a A_\mu^b A_\nu^c - \frac{1}{e}\epsilon_{abc}\hat{\phi}^a \left(\partial_\mu\hat{\phi}^b\partial_\nu\hat{\phi}^c + e\epsilon_{bjk}A_\mu^j\hat{\phi}^k\partial_\nu\hat{\phi}^c + e\epsilon_{cmn}A_\mu^m\hat{\phi}^n\partial_\mu\hat{\phi}^b + \right. \\ &\quad \left. e^2\epsilon_{bjk}\epsilon_{cmn}A_\mu^j A_\mu^m\hat{\phi}^j\hat{\phi}^n\right) \\ &= \hat{\phi}^a\partial_\mu A_\nu^a - \hat{\phi}^a\partial_\nu A_\mu^a + e\epsilon_{abc}\hat{\phi}^a A_\mu^b A_\nu^c - e^{-1}\epsilon_{abc}\hat{\phi}^a\partial_\mu\hat{\phi}^b\partial_\nu\hat{\phi}^c - \hat{\phi}^a \left(\epsilon_{abc}\epsilon_{bjk}A_\mu^j\hat{\phi}^k\partial_\nu\hat{\phi}^c + \epsilon_{abc}\epsilon_{cmn}A_\mu^m\hat{\phi}^n\partial_\mu\hat{\phi}^b\right) - \\ &\quad e\epsilon_{abc}\epsilon_{bjk}\epsilon_{cmn}A_\mu^j A_\mu^m\hat{\phi}^j\hat{\phi}^n\hat{\phi}^a \\ &= \partial_\mu(\hat{\phi}^a A_\nu^a) - \partial_\nu(\hat{\phi}^a A_\mu^a) - (A_\nu^a\partial_\mu\hat{\phi}^a - A_\mu^a\partial_\nu\hat{\phi}^a) - e^{-1}\epsilon_{abc}\hat{\phi}^a\partial_\mu\hat{\phi}^b\partial_\nu\hat{\phi}^c + e\epsilon_{abc}\hat{\phi}^a A_\mu^b A_\nu^c - \\ &\quad \left(\cancel{\hat{\phi}^a A_\nu^a\hat{\phi}^b\partial_\mu\hat{\phi}^b} - (\hat{\phi}^a)^2 \overset{1}{\rightarrow} A_\nu^b\partial_\mu\hat{\phi}^b + (\hat{\phi}^a)^2 \overset{1}{\rightarrow} A_\mu^c\partial_\nu\hat{\phi}^c - \cancel{\hat{\phi}^a A_\mu^a\hat{\phi}^c\partial_\nu\hat{\phi}^c}\right) + e\epsilon_{cmn}A_\mu^c A_\nu^m\hat{\phi}^n - eA_\mu^a\hat{\phi}^a \epsilon_{cmn}A_\nu^m\hat{\phi}^c\hat{\phi}^n \overset{0}{\rightarrow} \\ &= \partial_\mu(\hat{\phi}^a A_\nu^a) - \partial_\nu(\hat{\phi}^a A_\mu^a) - e^{-1}\epsilon_{abc}\hat{\phi}^a\partial_\mu\hat{\phi}^b\partial_\nu\hat{\phi}^c \end{aligned}$$

Entonces, en el gauge $\hat{\phi}^a = v\delta^{a3}$, se reduce a la expresión usual. Usemos esta última expresión como un nuevo tensor de campos electromagnético y hallemos el campo magnético

$$\begin{aligned}
 B^\rho &= \frac{1}{2}\epsilon^{\rho\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu} \\
 &= \frac{1}{2}\epsilon^{\rho\mu\nu}\left(\partial_\mu(\hat{\phi}^a A_\nu^a) - \partial_\nu(\hat{\phi}^a A_\mu^a) - e^{-1}\epsilon_{abc}\hat{\phi}^a\partial_\mu\hat{\phi}^b\partial_\nu\hat{\phi}^c\right) \\
 &= \frac{1}{2}\left(\epsilon^{\rho\mu\nu}\partial_\mu(\hat{\phi}^a A_\nu^a) - (-)\epsilon^{\rho\mu\nu}\partial_\mu(\hat{\phi}^a A_\nu^a) - e^{-1}\epsilon^{\rho\mu\nu}\epsilon^{abc}\hat{\phi}^a\partial_\mu\hat{\phi}^b\partial_\nu\hat{\phi}^c\right) \\
 &= \epsilon^{\rho\mu\nu}\partial_\mu(\hat{\phi}^a A_\nu^a) - (2e)^{-1}\epsilon^{\rho\mu\nu}\epsilon^{abc}\hat{\phi}^a\partial_\mu\hat{\phi}^b\partial_\nu\hat{\phi}^c
 \end{aligned} \tag{2}$$

Consideremos el flujo de campo magnético a través de una esfera en el infinito S_∞^2 ,

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \int d\vec{S} \cdot \vec{B} \\
 &= \int d\vec{S} \nabla \times (\hat{\phi}^a \mathbf{A}^a) - (2e)^{-1} \int d\vec{S} \epsilon^{\rho\mu\nu} \epsilon^{abc} \hat{\phi}^a \partial_\mu \hat{\phi}^b \partial_\nu \hat{\phi}^c
 \end{aligned}$$

Donde la primera integral se anula en virtud del Teorema de la Divergencia, pues la divergencia de un rotor es cero. La segunda integral es la definición del *winding number* o en este caso *número monopolar*, entonces

$$\Phi = -\frac{4\pi n}{e} \tag{3}$$

El flujo de campo magnético está cuantizado. Podemos inferir una carga magnética también cuantizada. Es más, si $Q_m = \Phi$ (en algún sistema de unidades), entonces de la ecuación anterior resulta una relación conocida como **cuantización de Dirac** o también conocida como **condición de Schwinger**[2]:

$$Q_m Q_e \propto n \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

Esto es, la existencia de la carga eléctrica cuantizada implica la existencia de una carga magnética también cuantizada.

Resulta claro de este análisis que los monopolos están caracterizados por el entero n o su carga. Construyamos la solución monopolar más simple, $n = 1$. Esta solución es conocida como **monopolo de t' Hooft-Polyakov** [11, 12]. Para esto, usemos el siguiente ansatz

$$\begin{aligned}
 \phi^a(\vec{x}) &= \phi_0 f(r) \frac{x^a}{r}, \\
 A_i^a(\vec{x}) &= a(r) \epsilon^{aij} \frac{x_j}{er^2}
 \end{aligned}$$

Donde requerimos que $f(\infty) = a(\infty) = 1$ para que tengan el comportamiento asintótico deseado y $f(0) = a(0) = 0$ para que estén bien definidos en $r = 0$ y además seguimos con el gauge $A_0^a = 0$. Con estos datos construyamos la energía del monopolo

$$E = T + V = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(B_i^a)^2 + \frac{1}{2}|(D_i\phi)^a|^2 + V(|\phi|) \right] \tag{5}$$

Recordemos que el campo magnético se escribe $B_i^a = \epsilon_{ijk}\partial_j A_k^a + 1/2e\epsilon_{ijk}\epsilon^{abc}A_j^b A_k^c$, si escribimos $A_i^a = \epsilon^{aij}K_j$, la expresión para el campo se reduce a $B_i^a = \partial_a K_i - \delta_{ai}\partial_j K^j + K_a K_i$. Poniendo

$K_i = a(r)x_i/er^2$ entonces

$$B_i^a = -\frac{1}{e} \left[\frac{a'}{r} (\delta_{ai} - \hat{x}_a \hat{x}_i) + \frac{2a - a^2}{r^2} \hat{x}_a \hat{x}_i \right] \quad (6)$$

$$\implies \frac{1}{2} (B_i^a)^2 = \frac{1}{2e^2 r^4} [2r^2 a'^2 + (2a - a^2)^2] \quad (7)$$

La derivada covariante es

$$(D_i \phi)^a = \phi_0 \left[\frac{(1-a)f}{r} (\delta_{ai} - \hat{x}_a \hat{x}_i) + f' \hat{x}_a \hat{x}_i \right] \quad (8)$$

$$\implies \frac{1}{2} |(D_i \phi)^a|^2 = \frac{\phi_0^2}{2r^2} [2(1-a)^2 f^2 + r^2 f'^2] \quad (9)$$

Y finalmente, el potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{4} \lambda \phi_0^4 (f^2 - 1)^2 \quad (10)$$

Finalmente, la energía del monopolo es

$$E = \int d^3x \left(\frac{1}{2e^2 r^4} [2r^2 a'^2 + (2a - a^2)^2] + \frac{\phi_0^2}{2r^2} [2(1-a)^2 f^2 + r^2 f'^2] + \frac{1}{4} \lambda \phi_0^4 (f^2 - 1)^2 \right) \quad (11)$$

Haciendo la variación de la energía para encontrar la solución que minimice la integral anterior encontramos las ecuaciones de movimiento. Estas son

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} = \frac{2}{r} (2a(r) + 1)^2 f(r) - \lambda (f^2 - 1) f, \quad (12)$$

$$\frac{d^2 a}{dr^2} = \frac{2}{r^2} a(r) (a(r) + 1) (2a(r) + 1) + 4f(r)^2 (2a(r) + 1) \quad (13)$$

Estas ecuaciones se pueden resolver numéricamente para λ pequeños. Se puede encontrar una solución analítica para $\lambda = 0$, conocida como solución **BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfeld)**³.

$$a(\rho) = 1 - \frac{\rho}{\sinh \rho},$$

$$f(\rho) = \coth \rho - \frac{1}{\rho}$$

Donde $\rho = e\phi_0 r$.

El objetivo de todas estas consideraciones es notar que la carga magnética no surge de la dinámica sino de consideraciones topológicas sobre la estructura de tres campos escalares en un espacio tridimensional.

Los respectivos casos no lineales para $d = 2, 3$ no se desarrollarán en este trabajo, sin embargo, vale la pena mencionarlos ya que son de suma importancia en física. En $d = 2$ las configuraciones de campo $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow Y$ están caracterizadas por elementos de $\pi_2(Y)$. El caso más sencillo surge cuando

³Las soluciones BPS son aquellas que saturan la desigualdad de Bogomol'nyi [10]

$$E \geq 4\pi\phi_0 \frac{|n|}{e}$$

$Y = S^2$, de modo que $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$. Solitones clasificados por este entero son *lumps* en el modelo σ y también Baby Skyrmions.

En $d = 3$, el grupo de homotopía relevante es $\pi_3(Y)$. El caso más simple no trivial es cuando $Y = S^3$, de modo que $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$. Solitones que están caracterizados por este entero aparecen en el **modelo de Skyrme** y son llamados **Skyrmiones**. Existe otra posibilidad no trivial cuando $Y = S^2$, ya que $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$. Este tipo de solitones aparecen en el **modelo de Skyrme-Faddev**.

Con toda esta información podemos armar una tabla de clasificación de los solitones topológicos en dimensión $d = 1, 2, 3$ [6]

Tabla 1. Tabla de clasificación de posibles solitones en teorías de campos escalares lineales y no lineales.

d	Lineal	No lineal
1	Kink	Kink no lineal
2	Vórtice	Lumps en el modelo sigma Baby Skyrmions
3	Monopolo	Skyrmion

Conclusiones

En la primera parte del trabajo se presentaron las herramientas básicas de la Teoría de Homotopía. Se desarrollaron teoremas clave a la hora abordar el cálculo del grupo de homotopía de cualquier espacio. De especial importancia para la segunda parte fueron el cálculo de los grupos de homotopía de n -esferas.

En la segunda parte nos ocupamos de la clasificación de solitones topológicos en dimensiones $d = 1, 2, 3$. En $d = 1$ nos ocupamos del kink y del modelo de seno de Gordon. En $d = 2$ se estudiaron los vórtices. Analizando el ansatz de Nielsen-Olesen y el modelo ABEH que presenta soluciones vorticiales. A su vez se introdució el Teorema de Derrick que prohíbe la existencia de solitones en $d \geq 2$ usando sólo campos escalares, además, se mostró una forma de evadirlo usando campos de gauge. En $d = 3$ se abordaron los monopolos. En particular, se estudiaron las soluciones monopolares del modelo de Georgi-Glashow y se desarrolló el conocido monopolo de 't Hooft-Polyakov. También, se mostró que la carga magnética está cuantizada como consecuencia de la cuantización de la carga eléctrica.

Aunque no se desarrollaron, los correspondientes casos no lineales para $d = 2, 3$ se introdujeron debido a su aplicabilidad en Superconductividad y modelos de Física del Estado Sólido.

Bibliografía

- [1] Hatcher, A., 2002. *Algebraic topology*. New York: Cambridge University Press.
- [2] Boya, L., Cariñena, J. and Mateos, J., 1978. *Homotopy and Solitons*. Fortschritte der Physik, 26(3), pp.175-214.
- [3] Schaposnik, Fidel A., 2014. *Solitons and their applications in Supersymmetry, Holography, Brane dynamics and Condensed Matter*. Manuscript in progress.
- [4] Weinberg, S., n.d. *The quantum theory of fields Vol. 2*.
- [5] C. Von Westenholz. Annales de l'I.H.P. Physique theorique, 2021. *Topological and Noether-conservation laws*. [online] 30. Available at: http://www.numdam.org/item/AIHPA_1979__30_4_353_0/.
- [6] Manton, N. and Sutcliffe, P., n.d. *Topological solitons*.
- [7] Nielsen, H. and Olesen, P., 1973. *Vortex-line models for dual strings*. Nuclear Physics B, 61, pp.45-61.
- [8] de Vega, H. and Schaposnik, F., 1976. *Classical vortex solution of the Abelian Higgs model*. Physical Review D, 14(4), pp.1100-1106.
- [9] Hermann, R., 1976. *The geometry of non-linear differential equations, Baaecklund transformations, and solitons. Part A*. Brookline, Mass., USA: Math Sci Press.
- [10] Srednicki, M., 2007. *Quantum field theory*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [11] Hooft, G., 1974. *Magnetic monopoles in unified gauge theories*. Nuclear Physics B, 79(2), pp.276-284.
- [12] A.M.Polyakov, *Particle Spectrum in the Quantum Field Theory*, JETP Lett. **20**, 194-195 (1974). PRINT-74-1566 (LANDAU-INST).
- [13] Baker, M. and Steinke, R., 2000. *An effective string theory of Abrikosov–Nielsen–Olesen vortices*. Physics Letters B, 474(1-2), pp.67-72.
- [14] F. Englert and R. Brout, *Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons*. Phys. Rev. Lett. 13 (1964) 321.
- [15] P. W. Higgs, *Broken symmetries, massless particles and gauge fields*. Phys. Lett. 12 (1964) 132.
- [16] A. A. Abrikosov, Doklady Akademii Nauk. SSSR 86 (1952) 489.