

El Teorema de Reeh-Schlieder y Entropía de Entrelazamiento del vacío cuántico

Trabajo final del Seminario de Mecánica Cuántica

Isaí E. Dávila Cuba

Resumen. Se demostrará el teorema de Reeh-Schlieder, el cual establece que en la teoría cuántica de campos, operadores locales en cierta región del espacio están entrelazadas con las variables en otras regiones. De hecho, este entrelazamiento entre regiones de espaciotiempo adyacentes es de carácter divergente. También explicamos una forma de establecer el grado de entrelazamiento entre estados usando un análogo a la desigualdad de Bell en AQFT. Concluimos que el estado de vacío viola maximalmente esta desigualdad, por lo que este está maximalmente entrelazado con el entorno.

Introducción

El entrelazamiento es uno de los conceptos más importantes que distinguen lo cuántico de lo clásico. Lo cuántico permite la superposición de estados y esto a su vez produce correlaciones entre subsistemas separados por grandes distancias. Una medida del entrelazamiento cuántico es la conocida entropía de entrelazamiento, la cual ha tenido un amplio rango de aplicaciones en la teoría de información cuántica, física de la materia condensada, relatividad general e incluso en física de altas energías en estos últimos años. Uno de los progresos más importante de este tema se la debemos a Ryu y Takayanagi [10], los cuales propusieron una fórmula holográfica para la entropía de entrelazamiento.

La motivación para estudiar el entrelazamiento cuántico varia dependiendo del área de investigación. Por mencionar algunos, en la teoría de información cuántica, el entrelazamiento cuántico es explotado como una fuente invaluable para manipular tareas computacionales que son imposibles en la computación clásica. En física de la materia condensada, el entrelazamiento es utilizado para caracterizar fases cuánticas. Y por último en QFT, en el cual se centra este trabajo, la entropía de entrelazamiento juega un papel importante ya que surge como propiedad de operadores locales.

La formulación algebraica de la Teoría Cuántica de Campos o AQFT es uno de los programas para axiomatizar QFT que emergió en la década de los 50 con la motivación de hacer a QFT matemáticamente precisa. AQFT, desarrollada inicialmente por Haag, Kastler, Araki, toma un paso radical al centrarse en observables locales con la idea de que los campos pueden emerger naturalmente de estos. Esta rigurosidad matemática permite el estudio de conceptos fundamentales en QFT. Nociones fundamentales sobre el entrelazamiento han sido obtenidos con la ayuda de AQFT.

Uno puede pensar sobre AQFT como una formalización de la mecánica cuántica *a la Heisenberg*, es decir, de la mecánica matricial.

Notación y conceptos básicos

Antes de abordar el enunciado del teorema necesitaremos algunos conceptos. En la materia hemos estado lidiando con la mecánica cuántica estándar de sistemas discretos. Ahora, pasaremos a QFT, una teoría relativista donde los objetos fundamentales son los campos.

Espacio de Minkowski

Ya que hablamos de una teoría relativista, entonces debemos tener un fondo fijo. Este es el espacio de Minkowski \mathcal{M} . Un espacio D-dimensional equipado con un producto escalar

$$\langle x, y \rangle = x_0 y_0 - \vec{x} \cdot \vec{y}$$

Conjuntos abiertos y acotados en \mathcal{M} serán denotados como \mathcal{O} .

Algunas regiones especiales del espaciotiempo de Minkowski son: **cono doble** o **diamante** y la **cuña** o *wedge* en inglés.

Un cono doble o diamante es la intersección del cono de luz positivo (futuro) con el cono de luz negativo (pasado). Estas regiones son acotadas. Una vez que se ha elegido un sistema de referencia uno puede definir la cuña derecha como $W_R = \{(t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 > |t|\}$ (Ver figura 1).

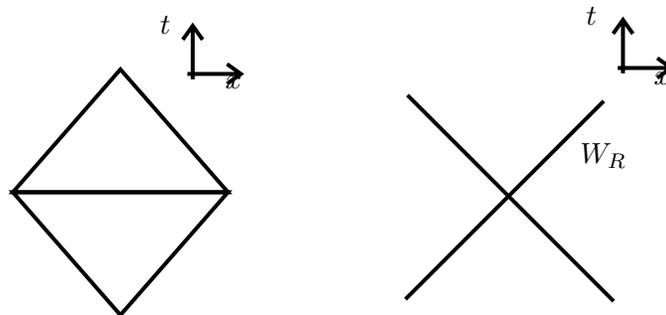


Figura 1. Un doble cono en la figura de la izquierda y la cuña derecha en la figura de la derecha

Álgebras locales

En la demostración que se hará del teorema y en la discusión se hablará de álgebras locales definidas en regiones del espaciotiempo \mathcal{O} .

Los operadores locales son considerados como funcionales sobre distribuciones definidos como

$$\phi_f = \int d^D x f(x) \phi(x)$$

Para alguna función f continua y con soporte en \mathcal{O} . Estas funciones son llamadas funciones de regularización. Con estos operadores podemos formar otros operadores más complejos, por ejemplo, $e^{i\phi_f}$ o $F(\phi_f)$ para una función acotada F . Estos operadores son acotados. La razón para considerar operadores acotados es que estos están definidos en todo el espacio de Hilbert de manera que estos

pueden ser multiplicados y obtener otro operador acotado. En otras palabras, estos forman un álgebra de operadores $\mathcal{A}(\mathcal{O})$.

Es razonable pensar que el álgebra de operadores $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ es cerrada respecto a la conjugación, es decir, que si $\phi_f = \int d^D x f(x)\phi(x)$ es un operador definido en una dada región entonces, $\phi_f^\dagger = \int d^D x \bar{f}(x)\phi(x)$ lo es también. Un álgebra actuando sobre un espacio de Hilbert y que es cerrada bajo la conjugación se denomina como $*$ -álgebra. A partir de ahora cualquier elección de un álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ será una $*$ -álgebra.

Una clase espacial de $*$ -álgebras son aquellas llamadas **álgebras de von Neumann**. Estas están definidas como

Definición 1 (Álgebras de von Neumann). Un álgebra von Neumann \mathcal{W} es una $*$ -álgebra que además satisface

1. $1 \in \mathcal{W}$,
2. $(\mathcal{W}')' = \mathcal{W}$,

donde $\mathcal{W}' = \{a \in \mathcal{A} \mid [a, b] = 0, \forall b \in \mathcal{W}\}$ llamado el conmutante de \mathcal{W} .

Estados

Pasemos ahora a definir el concepto de un estado en este formalismo. En general, un estado físico de un sistema cuántico representado por un álgebra de von Neumann $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{M})$ está dado por un funcional de expectación lineal, positivo y normalizado $\tau : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C}$. Esto es para $M \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \tau(M^*M) &\geq 0 \quad (\text{Positividad}) \\ \tau(I) &= 1 \quad (\text{Normalización}) \end{aligned}$$

Esto no es más que otra forma de escribir $\langle \tau | M^*M | \tau \rangle \geq 0$ y $\langle \tau | \tau \rangle = 1$. Una clase importante de estos estados son los llamados **estados normales**. Estos son estados que satisfacen

$$\phi(M) = \text{Tr}(\rho M), \quad M \in \mathcal{A}$$

para alguna matriz densidad ρ actuando sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} .

Axiomas de Haag-Kastler (o representación de vacío)

Los axiomas de Haag-Kastler son un conjunto de características estructurales que se presentan en muchos modelos conocidos en QFT. Estos axiomas son el formalismo básico de AQFT. El objeto básico de estos axiomas es lo que se conoce como una **red de álgebras de observables locales** sobre algún espaciotiempo. Esta red \mathfrak{N} la definimos como el conjunto de álgebras de von Neumann \mathcal{W} en regiones del espacio tiempo de Minkowski \mathcal{O} , es decir,

$$\mathfrak{N} = \{\mathcal{W}(\mathcal{O}) \mid \mathcal{O} \text{ es una región de } \mathcal{M}\}$$

Si los elementos de esta red satisfacen las siguientes propiedades, entonces se le denomina como **representación de vacío**.

1. **Isotonía.** Si $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$ entonces, $\mathcal{W}(\mathcal{O}_1) \subseteq \mathcal{W}(\mathcal{O}_2)$.

Esto quiere decir que un observable medido en la región \mathcal{O}_1 es *a fortiori* medible en una región \mathcal{O}_2 que contiene a \mathcal{O}_1 .

2. **Causalidad.** Si \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 son dos regiones separadas por un intervalo tipo espacio, entonces $\mathcal{W}(\mathcal{O}_1) \subseteq (\mathcal{W}(\mathcal{O}_2))'$.

Este axioma quiere decir que los operadores en $\mathcal{W}(\mathcal{O}_1)$ conmutan con los operadores en $\mathcal{W}(\mathcal{O}_2)$.

3. **Covarianza de Poincaré.** El grupo de Poincaré debe actuar por automorfismos del álgebra.

Esto quiere decir que tanto los campos como los estados deben respetar las simetrías del espaciotiempo de Minkowski. En otras palabras, deben transformar de acuerdo a cierta representación del grupo de Poincaré.

4. **Aditividad.** Si $\mathcal{O} = \bigcup_j \mathcal{O}_j$, entonces $\mathcal{W}(\mathcal{O}) = (\bigcup_j \mathcal{W}(\mathcal{O}_j))''$.

5. **Existencia de dinámica.** Existe alguna "ley dinámica" que permite calcular los campos a un tiempo arbitrario en términos de los campos en una tajada pequeña de tiempo $\Sigma_{t,\epsilon} = \{x \mid |x^0 - t| < \epsilon\}$ (Figure 2).

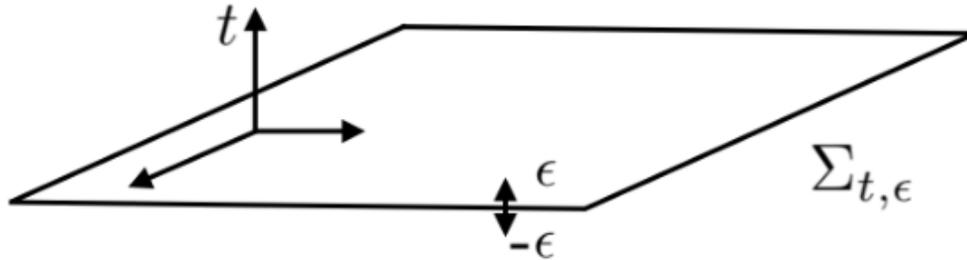


Figura 2. Una "tajada" del espacio tiempo $\Sigma_{t,\epsilon}$.

6. **Condición espectral.** El generador de traslaciones espaciotemporales, es decir, el operador de energía momento, tiene espectro confinado al cono de luz positivo.

El Teorema de Reeh-Schlieder

Enunciado

Consideremos una región del espaciotiempo de Minkowski $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$. Como vimos en los axiomas de Haag-Kastler, existe un álgebra de operadores locales $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ definido en \mathcal{O} que actúan sobre el estado de vacío. Esta acción produce estados de la forma

$$|\Psi_{\vec{x}}\rangle = \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)|\Omega\rangle,$$

para todo $x_i \in \mathcal{O}$ y para un $n = 1, 2, 3, \dots$ arbitrario y para $\phi(x_i) \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$.

Teorema 1 (Reeh-Schlieder). Todo estado arbitrario de \mathcal{H} puede ser aproximado con precisión arbitraria por $|\Psi_{\vec{x}}\rangle$. Es decir, los estados $|\Psi_{\vec{x}}\rangle$ son densos en \mathcal{H} .

Un bosquejo de la demostración se puede dar ahora: si el teorema fuera falso, es decir, que los estados $|\Psi_{\vec{x}}\rangle$ no son densos en \mathcal{H} , entonces debería existir un estado $|\chi\rangle \in \mathcal{H}$ que es ortogonal a $|\Psi_{\vec{x}}\rangle$ para todo $\vec{x} \in \mathcal{O}$.

$$\langle\chi|\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)|\Omega\rangle = 0$$

Entonces para demostrar el teorema necesitamos demostrar que $\langle \chi | \phi(x_1)\phi(x_2) \cdots \phi(x_n) | \Omega \rangle = 0$ para todo $x_i \in \mathcal{M}$ de modo que $|\chi\rangle = 0$. Es decir, que el único estado ortogonal a $|\Psi_{\vec{x}}\rangle$ es el estado nulo.

Demostración 1. Primero mostremos que

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle \chi | \phi(x_1)\phi(x_2) \cdots \phi(x_n) | \Omega \rangle$$

se sigue anulando aún si el n -avo punto x_n es trasladado fuera de \mathcal{O} pero manteniendo los demás puntos en \mathcal{O} (como se muestra en la figura 3)

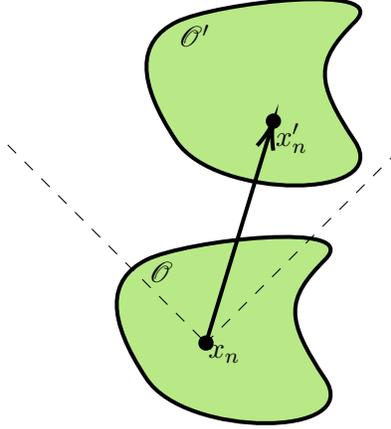


Figura 3. Ilustración del procedimiento de trasladar el punto x_n por un vector tipo tiempo.

El punto x_n es trasladado al punto $x'_n = x_n + \mathbf{u}t$ para algún real t y siendo \mathbf{u} el vector tipo tiempo.

Consideremos la función

$$g(t) = \langle \chi | \phi(x_1)\phi(x_2) \cdots \phi(x_n + \mathbf{u}t) | \Omega \rangle = \langle \chi | \phi(x_1)\phi(x_2) \cdots e^{iHt}\phi(x_n)e^{-iHt} | \Omega \rangle,$$

donde H es el Hamiltoniano. Es fácil ver que para $t \rightarrow 0$ la función $g(t) \rightarrow 0$ pues en ese caso el vector $x'_n \rightarrow x_n \in \mathcal{O}$. Ya que $H|\Omega\rangle = 0$, entonces

$$g(t) = \langle \chi | \phi(x_1)\phi(x_2) \cdots e^{iHt}\phi(x_n) | \Omega \rangle$$

La función $g(t)$ en principio es una función compleja, podemos preguntarnos sobre su analiticidad. Se demuestra en [3] que de hecho es una función holomorfa en el semiplano superior en parte debido a que H es un operador acotado por abajo por 0. Además de ser holomorfa en el semiplano, esta se anula en un intervalo $I = [-\epsilon, \epsilon]$ de la recta real para ϵ suficientemente pequeño.

Si supiéramos que $g(t)$ es holomorfa en I entonces el teorema estaría probado pues como sabemos que $g(t)$ se anula en I , al ser holomorfa esto implicaría que se anula para todo t pues su expansión en series de Taylor alrededor del cero sería idénticamente 0. Sin embargo, por ahora sólo sabemos que es continua en I .

Para $g(t)$ en el semiplano superior podemos usar la formula integral de Cauchy para representar a $g(t)$ de la siguiente forma

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dt' \frac{g(t')}{t' - t}$$

Donde γ es cualquier curva cerrada que encierre el punto t en el semiplano superior (Figura 4(a)). Pero como sabemos que $g(t)$ se anula en I podemos elegir a γ para que incluya este segmento (Figura 4(b))

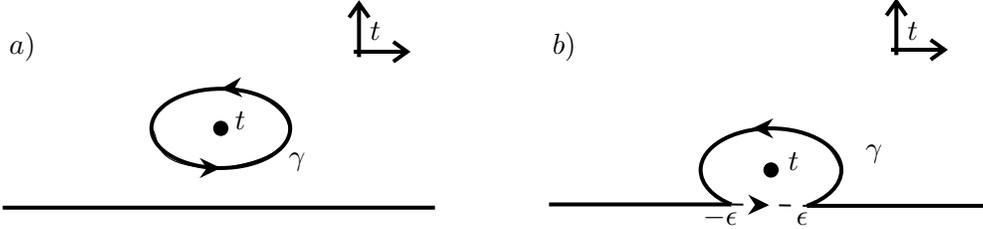


Figura 4. (a) Una función $g(t)$ holomorfa en el semiplano superior t puede ser calculada usando la fórmula integral de Cauchy: cualquier contorno γ en el semiplano superior puede ser usada para calcular $g(t)$ para t en el interior de γ . (b) Si $g(t)$ es continua en la frontera del semiplano superior, uno puede hacer que γ recorra parcialmente el intervalo I . Como en adición $g(t) = 0$ en I (indicado en líneas discontinuas), entonces esta parte del contorno se puede despreciar. En este caso, la fórmula integral de Cauchy sigue siendo holomorfa cuando t se mueve a través de I e incluso en el semiplano inferior, lo que implica que $g(t)$ es holomorfa en I y es idénticamente cero.

Si hacemos eso la integral sobre I se anula pues $g(t') = 0$ para $t' \in I$. Entonces la formula integral de Cauchy sigue siendo holomorfa si movemos a t a través de I y del semiplano inferior. En particular, si pasamos por I sigue valiendo la fórmula integral y acabamos de mostrar que $g(t)$ es holomorfa en I y se anula. Por lo que la función $g(t)$ es idénticamente nula como se dijo antes.

Si repetimos este mismo argumento para el el punto trasladado x'_n llegamos a la conclusión de que la función también se anula. Como podemos llegar a cualquier punto de Minkowski haciendo este argumento entonces $\psi(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = 0$ no sólo para $x_n \in \mathcal{O}$ sino para $x_n \in \mathcal{M}$.

Si hacemos todo el procedimiento anterior pero ahora lo que hacemos es trasladar dos puntos, por ejemplo,

$$g(t) = \langle \chi | \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_{n-2}) \phi(x_{n-1} + \mathbf{u}t) \phi(x_n + \mathbf{u}t) | \Omega \rangle,$$

y usando de nuevo $H | \Omega \rangle = 0$ llegamos a las mismas conclusiones. Por lo tanto, podemos concluir que la función $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ para todo $x_i \in \mathcal{M}$.

Un corolario importante

El teorema de Reeh-Schlieder tiene un corolario inmediato y de mucha importancia. Consideremos dos regiones del espaciotiempo \mathcal{M} que estén separadas por un intervalo tipo espacio, \mathcal{O} y \mathcal{O}' .

Sea \mathbf{a} cualquier operador (no necesariamente local) en el álgebra de operadores de \mathcal{O} . Debido al axioma de causalidad de Haag-Kastler, cualquier operador local en el álgebra de \mathcal{O}' conmuta con \mathbf{a} :

$$[\phi(x), \mathbf{a}] = 0, \quad \forall x \in \mathcal{O}'$$

De manera análoga, cualquier operador \mathbf{a}' en \mathcal{O}' satisface

$$[\phi(x), \mathbf{a}'] = 0, \quad \forall x \in \mathcal{O}$$

El teorema de Reeh-Schlieder puede ser aplicado tanto a la región \mathcal{O} como a \mathcal{O}' ya que ambas son regiones abiertas del espaciotiempo. Esto tiene una consecuencia. Suponga que el operador \mathbf{a} aniquila al vacío

$$\mathbf{a} |\Omega\rangle = 0$$

Como \mathbf{a} conmuta con todo operador local en \mathcal{O}' entonces que \mathbf{a} aniquile al vacío implica que

$$\mathbf{a}\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)|\Omega\rangle = 0, \quad \forall x_i \in \mathcal{O}'$$

Pero el teorema de Reeh-Schlieder dice que los estados $\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)|\Omega\rangle$, $x_i \in \mathcal{O}'$ son densos, y generan cualquier otro estado en el espacio de Hilbert \mathcal{H} . Entonces, que el lado izquierdo de la ecuación anterior se anule para todo n implica que $\mathbf{a} = 0$ en \mathcal{H} .

Es decir, que todo operador que aniquile al vacío en cierta región necesariamente debe ser un operador nulo.

A continuación definimos dos conceptos que nos permitirán reformular el teorema de Reeh-Schlieder de acuerdo a la convención moderna.

Definición 2 (Estado cíclico). Un estado $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ es llamado un estado cíclico para un álgebra si los estados $\mathbf{a}|\Psi\rangle$, $\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$ son densos en \mathcal{H} .

Definición 3 (Estado de separación). Un estado $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ se dice que es un estado de separación para $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ si la condición $\mathbf{a}|\Psi\rangle = 0$ implica que $\mathbf{a} = 0$ donde $\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$.

Con estas definiciones el Teorema de Reeh-Schlieder nos dice que el estado de vacío es un estado cíclico. Además, por el corolario anterior, el estado de vacío también es un estado de separación. Con esto en mente reformulemos el teorema de Reeh-Schlieder:

Teorema 2 (Reeh-Schlieder). El estado de vacío es un estado cíclico y de separación para cualquier álgebra de operadores locales $\mathcal{A}(\mathcal{O})$.

Consecuencias inmediatas del corolario anterior

Que el estado de vacío $|\Omega\rangle$ sea un estado de separación tiene grandes implicancias respecto a su estructura misma. En particular, la contraposición del corolario anterior implica que ningún operador no nulo puede aniquilar al estado de vacío. Por lo tanto, cualquier evento que esté representado por un operador de proyección no nulo $P \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$ debe tener un valor de expectación no nulo pues $P|\Omega\rangle \neq 0$. Podemos interpretar esto como que **en el vacío cualquier evento local puede ocurrir**.

Otra consecuencia aparece cuando consideramos el operador número de partículas \mathbf{N} . No es difícil convencerse de que si aplicamos el operador número de partículas al vacío este nos devuelve cero, $\mathbf{N}|\Omega\rangle = 0$. Entonces, es claro que por la propiedad de separación del vacío, $\mathbf{N} = 0$. Esto puede interpretarse como que en el vacío no existen partículas “reales”.

El teorema de Reeh-Schlieder podría parecer paradójico al inicio. Este implica que es posible actuar sobre el vacío con un operador \mathbf{a} y crear cualquier estado en \mathcal{H} .

Para entenderlo mejor, consideremos dos regiones del espaciotiempo separadas por intervalos tipo espacio llamadas Marley (\mathcal{O}) y Paradis (\mathcal{O}'). Supongamos que queremos crear un objeto en Paradis,

por ejemplo, una luna. Definimos un operador $\mathbf{M} \in \mathcal{A}(\mathcal{O}')$ cuyo valor de expectación es cero para estados que no contengan una luna y es 1 para estados que si la contengan. Entonces,

$$\langle \Omega | \mathbf{M} | \Omega \rangle \approx 0.$$

De acuerdo al teorema de Reeh-Schlieder, los estados en Marley son densos en todo \mathcal{H} , es decir, existe un operador \mathbf{a} en Marley tal que el estado $\mathbf{a} | \Omega \rangle$ aproxima al estado en Paradis que si contiene a la luna. Entonces,

$$\langle \Omega | \mathbf{a}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{a} | \Omega \rangle \approx 1$$

Como los operadores \mathbf{a} y \mathbf{M} estan separados por intervalos tipo espacio, estos conmutan y entonces

$$\langle \Omega | \mathbf{M} \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} | \Omega \rangle \approx 1$$

Si \mathbf{a} fuera un operador unitario, claramente habría una contradicción entre los valores de expectación de \mathbf{M} en Paradis. Pero el teorema de Reeh-Schlieder no garantiza la existencia de este operador unitario en \mathcal{O} que cree una luna en Paradis, sólo que tal operador existe. De hecho, concluimos a partir del argumento anterior que no es posible actuar con operadores unitarios con soporte en Marley que afecte las cantidades medidas en Paradis. Nótese que este ejemplo evidencia una relación entre la causalidad y la unitariedad.

Correlaciones en el vacío

Pasemos a discutir acerca de las correlaciones en el vacío que vimos en la sección anterior sobre las consecuencias del Teorema de Reeh-Schlieder. De hecho, esas correlaciones fueron evidentes en el corolario, pues se obtuvo que

$$\langle \Omega | \mathbf{M} \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} | \Omega \rangle \neq \langle \Omega | \mathbf{M} | \Omega \rangle \langle \Omega | \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} | \Omega \rangle$$

Otra de las consecuencias del Teorema de Reeh-Schlieder es que para toda región abierta del espacio tiempo separada tipo espacio $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, no importando cuán lejos estén separadas, existen operadores de proyección $P_i \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_i)$ que están correlacionados en el estado de vacío (ver ecuación anterior)¹.

Teorema 3 (Correlaciones entre operadores). Sean \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 dos regiones no vacías separadas por un intervalo tipo espacio. Sea $|\Omega\rangle$ el estado de vacío, entonces para cualquier operador de proyección $P_1 \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_1)$ tal que $0 \neq P_1 \neq I$ existe otro operador de proyección $P_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$ tal que $\langle \Omega | P_1 P_2 | \Omega \rangle > \langle \Omega | P_1 | \Omega \rangle \langle \Omega | P_2 | \Omega \rangle$. Es decir, P_1 y P_2 están correlacionados positivamente.

Demostración 2. Para la demostración basta con mostrar la existencia de un operador de proyección $P_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$ tal que $\langle \Omega | P_1 P_2 | \Omega \rangle \neq \langle \Omega | P_1 | \Omega \rangle \langle \Omega | P_2 | \Omega \rangle$. Probaremos la existencia por contradicción, así que asuma que $\langle \Omega | P_1 P_2 | \Omega \rangle = \langle \Omega | P_1 | \Omega \rangle \langle \Omega | P_2 | \Omega \rangle$ para todo P_2 . Definimos el operador $\tilde{P}_1 = P_1 - \langle \Omega | P_1 | \Omega \rangle I$, entonces

$$\langle \Omega | \tilde{P}_1 P_2 | \Omega \rangle = \langle \Omega | P_1 P_2 | \Omega \rangle - \langle \Omega | P_1 | \Omega \rangle \langle \Omega | P_2 | \Omega \rangle = 0,$$

para todo P_2 . Si vale para todo operador de proyección en $\mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$ entonces vale para todo operador O_2 en $\mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$,

$$\langle \Omega | \tilde{P}_1 O_2 | \Omega \rangle = 0, \quad \forall O_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_2).$$

¹El hecho de que las fluctuaciones del vacío generen estas correlaciones ha generado controversia, ya que parecen desafiar nociones bien establecidas de causalidad.

Como el estado de vacío es cíclico en $\mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$ implica que $\tilde{P}_1 |\Omega\rangle = 0 \implies \tilde{P}_1 = 0 \implies P_1 = \langle \Omega | P_1 | \Omega \rangle I$. Como P_1 es un operador de proyección $P_1 = P_1^2$ lo que implica que $\langle \Omega | P_1 | \Omega \rangle \in \{0, 1\}$, esto es, $P_1 |\Omega\rangle = 0$ o $P_1 |\Omega\rangle = |\Omega\rangle$. Como también $|\Omega\rangle$ es un estado de separación entonces $P_1 = 0$ o $P_1 = I$. Lo cual es una contradicción en ambos casos.

Divergencia de la Entropía de entrelazamiento del vacío

Como dijimos en el resumen del trabajo, la entropía de entrelazamiento entre dos regiones separadas tipo espacio es divergente en la teoría cuántica de campos. Para analizar esta divergencia primero necesitaremos discretizar el espacio como se muestra en la figura 5.

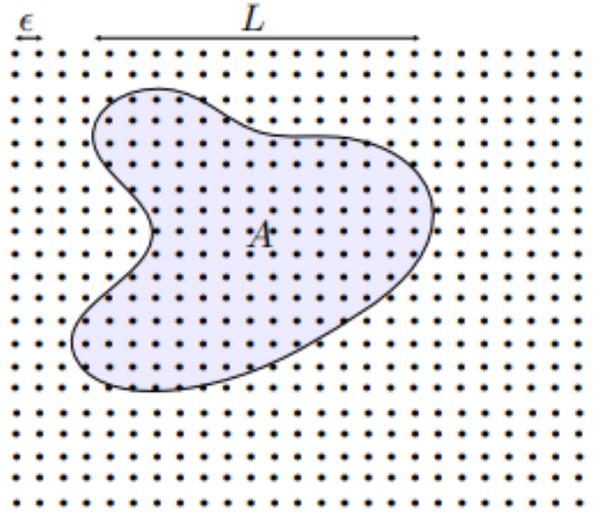


Figura 5. Una región A de tamaño L en un espacio discretizado con un espaciado de celda ϵ .

Luego, podemos tomar el límite continuo obteniendo una teoría de campo. En cada sitio existe un espacio de Hilbert \mathcal{H}_x , y el espacio de Hilbert total es el producto tensorial sobre todos los sitios

$$\mathcal{H} = \bigotimes_x \mathcal{H}_x.$$

Por lo tanto, asociados a cualquier descomposición de la celda en una región A y su complemento A^c , existen sus correspondientes factorizaciones del espacio de Hilbert:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{A^c}, \quad \mathcal{H}_A := \bigotimes_{x \in A} \mathcal{H}_x, \quad \mathcal{H}_{A^c} := \bigotimes_{x \in A^c} \mathcal{H}_x$$

De esta manera podemos definir la entropía de entrelazamiento y otras cantidades como la información mutua y las entropías de Rényi, etc. como lo hicimos en clase. Hagamos una estimación cruda de la entropía que muestre la divergencia. Consideremos $L \gg \epsilon$. La entropía de entrelazamiento entre A y A^c está acotada por arriba como

$$S(A) \leq \log(\dim \mathcal{H}_A)$$

Entonces, si hemos factorizado el espacio de Hilbert \mathcal{H}_A , su dimensión es el producto de las dimensiones de cada $\mathcal{H}_x, x \in \mathcal{A}$, entonces

$$S(A) \leq \log(\prod_{x \in \mathcal{A}} \dim(\mathcal{H}_x)) = N_A \log(\dim H_x),$$

ya que la dimensión de cada \mathcal{H}_x es igual y donde N_A es el número de sitios dentro de la región A . Si tomamos estados al azar en todo el espacio de Hilbert \mathcal{H} entonces la entropía de entrelazamiento es

$$S(A) \propto N_A \sim \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^{D-1},$$

donde $D - 1$ es el número de dimensiones espaciales. Esta es llamada la **ley de volumen** de la entropía de entrelazamiento. Sin embargo, uno podría suponer que el entrelazamiento es “de corto alcance” y sólo tenemos en cuenta los sitios vecinos, en ese caso

$$S(A) \sim \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^{D-2} \sim \frac{\text{Área}(\partial A)}{\epsilon^{D-2}}.$$

Esta es la **ley de área** para la entropía de entrelazamiento. En todo caso vemos que la entropía de entrelazamiento es divergente ultravioleta para $D > 2$ ² Nótese que este análisis es válido para cualquier estado. Podemos argumentar esto último diciendo que todo estado luce como el vacío a pequeñas distancias.

Si consideramos a una teoría de campo como el límite continuo de este sistema de celdas, entonces, resulta natural considerar una región del espaciotiempo A y su complemento A^c y asumir de nuevo que tenemos una factorización

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{A^c}.$$

Sin embargo, esta factorización no puede existir en QFT, pues esta implicaría la existencia de estados producto $|\psi\rangle \otimes |\chi\rangle$ que tienen entropía de entrelazamiento nula. Pero acabamos de ver que esto no es posible pues la entropía de entrelazamiento siempre presenta esta divergencia ultravioleta.

Entonces, **¿cómo podemos analizar la entropía de entrelazamiento cuando el espacio de Hilbert \mathcal{H} no se puede factorizar?** En ese caso entramos dentro de la Teoría de Tomita-Takesaki. Esta teoría se puede aplicar siempre que tengamos un álgebra \mathcal{A} actuando sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} con un estado cíclico y de separación.

¿Que tan entrelazado está el vacío?

Dado un par de álgebras de observables $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ definidas en dos subsistemas de un dado sistema cuántico. Un estado ϕ se dice que es un **estado producto** entre $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ si $\phi(MN) = \phi(M)\phi(N)$ para todo $M \in \mathcal{M}$ y $N \in \mathcal{N}$. Un estado normal se dice que es **separable** si es una combinación convexa de estados producto. Si ϕ tiene otra forma diremos que está **entrelazado** entre $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

Como consecuencia del teorema de Reeh-Schlieder podemos afirmar que el estado de vacío no es un estado producto entre $(\mathcal{A}(\mathcal{O}_1), \mathcal{A}(\mathcal{O}_2))$. Análisis más finos acerca de la naturaleza y el grado de entrelazamiento del vacío existen en la literatura. Explicaremos uno de estos. Una medida cuantitativa del entrelazamiento se puede dar usando **correlaciones de Bell**. Definida como [11]

²En el caso $D = 2$ la entropía la divergencia es logarítmica.

Definición 4 (Correlaciones de Bell). Sea $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset \mathcal{A}(\mathcal{H})$ un par de álgebras de von Neumann tales que $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}'$. La correlación máxima de Bell para el par $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ en el estado ϕ es

$$\beta(\phi, \mathcal{M}, \mathcal{N}) := \sup \frac{1}{2} \phi(M_1(N_1 + N_2) + M_2(N_1 - N_2)),$$

donde el supremo se toma sobre todos los operadores autoadjuntos $M_i \in \mathcal{M}, N_j \in \mathcal{N}$ con norma menor o igual a 1.

De acuerdo a [12], la versión CHSH de la desigualdad de Bell puede ser formulada en AQFT como

$$\beta(\phi, \mathcal{M}, \mathcal{N}) \leq 1$$

Si ϕ es un estado separable entre $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, entonces $\beta(\phi, \mathcal{M}, \mathcal{N}) = 1$. Entonces, aquellos estados que violen esta desigualdad estarán necesariamente entrelazados.

Teorema 4 ([12]). Sean $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset \mathcal{A}(\mathcal{H})$ dos álgebras de von Neumann que son conmutantes entre sí. Si alguno de ellos es abeliano, entonces $\beta(\phi, \mathcal{M}, \mathcal{N}) = 1$ para todos los estados ϕ .

Se demuestra en [16, 12] que $1 \leq \beta(\phi, \mathcal{M}, \mathcal{N}) \leq \sqrt{2}$. Entonces, diremos que un estado viola la desigualdad del Bell máximalmente si $\beta(\phi, \mathcal{M}, \mathcal{N}) = \sqrt{2}$. Se demuestra en [13] que $\beta(\phi, \mathcal{A}(\mathcal{O}_1), \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)) = \sqrt{2}$ para dos conos cuyos clausuras se intersecan (dos conos tangentes) y para todo estado normal ϕ . Entonces, en particular la desigualdad de Bell es violada maximalmente por el vacío.

En la extensa literatura de teoría de información cuántica existen varios intentos de cuantificar el grado de entrelazamiento de un dado estado [14, 15], pero todos concuerdan en que la violación maximal de la desigualdad de Bell conlleva un entrelazamiento maximal. Por lo tanto, el estado de vacío está maximalmente entrelazado y por consiguiente representa una situación totalmente no clásica.

¿Cómo calculamos la entropía de entrelazamiento en QFT?

Manipular matrices densidad, álgebras, etc no es una tarea fácil en QFT (por ejemplo, referimos a [17] para el cálculo de la entropía de entrelazamiento para una teoría escalar libre). Los métodos actuales para calcular la entropía de entrelazamiento se basan en regular la teoría (como hicimos en el cálculo de la divergencia de la entropía). Algunos de estos métodos son

1. **El truco de la réplica:** La n -ava entropía de Rényi se define como

$$S_n(A) = \frac{1}{n-1} \log \text{Tr}_A(\rho_A^n)$$

La entropía de entrelazamiento usual es el límite cuando $n \rightarrow 1$. Aunque la n -ava entropía de Rényi está definida para n entero, la continuación analítica se asume cuando se toma el límite $n \rightarrow 1$.

2. **Métodos de tiempo real para sistemas gaussianos:** La idea de este método es relacionar la matriz densidad del sistema con los valores de expectación de los campos (escalares o fermiónicos), algo que es posible sólo para sistemas gaussianos. Estos valores de expectación son calculados

usando distintos métodos y la entropía de entrelazamiento se puede calcular como en un sistema con grados de libertad finitos usando la entropía de von Neumann. Un ejemplo ilustrativo se muestra en [17] para el caso de dos osciladores acoplados.

3. Teorías Holográficas.

Conclusiones

Una de las consecuencias inmediatas de los axiomas de Haag-Kastler es el Teorema de Reeh-Schlieder. Este teorema ha sido uno de los tópicos más estudiados en el área de la Teoría Cuántica de Campos Algebraica (AQFT). La demostración de este teorema que se hizo en este trabajo se basa en argumentos de analiticidad, sin embargo, existen otras demostraciones en términos de propiedades de las álgebras de von Neumann. Revisamos un corolario de suma importancia y además definimos los conceptos de vector o estado cíclico y estado de separación, lo que nos permitió reformular el teorema en un lenguaje más usado en los papers actuales. A su vez vimos que el vacío presentaba correlaciones entre operadores actuando en regiones distantes, incluso si estaban separadas por intervalos tipo espacio. Sin embargo, esto no significa que podamos de alguna forma crear objetos actuando de manera local sobre el vacío en regiones distantes, ya que no es una conclusión del teorema. Analizamos el comportamiento de la entropía de entrelazamiento del vacío discretizando el espacio y luego tomando el límite continuo, obteniéndose un comportamiento divergente y universal (es decir, que está presente en todo estado). Una consecuencia de esta divergencia era que no es tan sencillo factorizar un espacio de Hilbert en QFT. En la sección final se estudió de manera cuantitativa el entrelazamiento del vacío, definiendo un análogo a la desigualdad de Bell aplicable en el contexto de AQFT, luego concluyendo que el vacío es un estado maximalmente entrelazado.

Apéndice 1: Estados puros y descomposición de Schmidt

Teorema 5 (Descomposición de Schmidt). Suponga que $|\psi\rangle$ un estado puro de un sistema compuesto AB . Entonces existen estados ortonormales $|i_A\rangle$ para el sistema A , y estados ortonormales $|i_B\rangle$ del sistema B tal que

$$|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i |i_A\rangle |i_B\rangle,$$

donde λ_i son números reales no negativos que satisfacen $\sum_i \lambda_i^2 = 1$ conocidos como los *coeficientes de Schmidt*.

Considere la siguiente consecuencia del teorema anterior: sea $|\psi\rangle$ un estado puro de un sistema compuesto AB . Debido a la descomposición de Schmidt, las matrices densidad reducidas

$$\begin{aligned} \rho_A &= \sum_i \lambda_i^2 |i_A\rangle \langle i_A|, \\ \rho_B &= \sum_i \lambda_i^2 |i_B\rangle \langle i_B|, \end{aligned}$$

tienen los mismos autovalores. Muchas propiedades de un sistema cuántico están completamente determinadas por los autovalores de la matriz reducida del sistema, entonces para un estado puro de un sistema compuesto tales propiedades serán las mismas para ambos sistemas.

Demostración 3. Daremos la demostración para el caso en que los sistemas A y B tiene espacios de estados de igual dimensión. Sea $|j\rangle$ y $|k\rangle$ bases ortonormales fijas para los sistemas A y B respectivamente. Entonces $|\psi\rangle$ puede ser escrito como

$$|\psi\rangle = \sum_{jk} a_{jk} |j\rangle |k\rangle$$

para coeficientes a_{jk} complejos que pueden formar una matriz \mathbf{a} . Por la descomposición en valores singulares, $\mathbf{a} = \mathbf{u}\mathbf{d}\mathbf{v}$, donde \mathbf{d} es una matriz diagonal con elementos no negativos y \mathbf{u} y \mathbf{v} son matrices unitarias. Entonces

$$|\psi\rangle = \sum_{ijk} u_{ji} d_{ii} v_{ik} |j\rangle |k\rangle.$$

Si definimos $|i_A\rangle := \sum_j u_{ji} |j\rangle$, $|i_B\rangle := \sum_k v_{ik} |k\rangle$, y $\lambda_i := d_{ii}$, vemos que

$$|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i |i_A\rangle |i_B\rangle.$$

Los estados $|i_A\rangle$ y $|i_B\rangle$ son ortonormales pues $\langle k_A | i_A \rangle = \langle k | \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u} | j \rangle = \delta_{kj}$, $\langle l_A | i_A \rangle = \langle l | \mathbf{v}^\dagger \mathbf{v} | j \rangle = \delta_{lj}$ como consecuencia de la unitariedad de \mathbf{u} y \mathbf{v} . Ahora considere la norma del estado $|\psi\rangle$

$$\begin{aligned} \langle \psi | \psi \rangle &= \left(\sum_j \lambda_j \langle j_A | \langle j_B | \right) \left(\sum_i \lambda_i |i_A\rangle |i_B\rangle \right) \\ &= \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j \langle j_A | i_A \rangle \langle j_B | i_B \rangle \\ &= \sum_i \lambda_i^2. \end{aligned}$$

Uno siempre puede hacer que el estado $|\psi\rangle$ esté normalizado entonces,

$$\sum_i \lambda_i^2 = 1.$$

Las bases $|i_A\rangle$ y $|i_B\rangle$ son llamadas *bases de Schmidt* para los sistemas A y B respectivamente y el número de λ_i no nulos es llamado *número de Schmidt* para el estado $|\psi\rangle$.

Probemos la siguiente proposición: un estado $|\psi\rangle$ de un sistema compuesto AB es un estado producto si y sólo si su número de Schmidt es 1. Si $|\psi\rangle$ es un estado producto entonces existen estados puros $|\phi_A\rangle$ y $|\phi_B\rangle$ en A y B respectivamente tal que $|\psi\rangle = |\phi_A\rangle |\phi_B\rangle$. Claramente el número de Schmidt es 1. En cambio, si el número de Schmidt es 1, entonces usando la descomposición de Schmidt $|\psi\rangle = \lambda_1 |i_A\rangle |i_B\rangle = |i_A\rangle |i_B\rangle$ pues $\lambda_1 = 1$, el cuál es un estado producto.

Los estados entrelazados son aquellos que tienen un número de Schmidt necesariamente mayor a 1.

Referencias

- [1] Witten, E., 2018. *Notes on Some Entanglement Properties of Quantum Field Theory*. arXiv e-prints,.
- [2] Ncatlab.org. 2021. Reeh-Schlieder theorem in nLab. [online] Available at: <https://ncatlab.org/nlab/show/Reeh-Schlieder+theorem> [Accessed 15 February 2021].
- [3] R. F. Streater and A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and All That* (W. A. Benjamin,1964; paperback edition, Princeton University Press, 2000).
- [4] Redhead, M., 1995. *More ado about nothing*. Foundations of Physics, 25(1), pp.123-137.
- [5] Ghazal, G., 2020. *Introduction to the Reeh-Schlieder Theorem and Entanglement Entropy In QFT*.
- [6] Summers, S., n.d. *Yet More Ado about Nothing: The Remarkable Relativistic Vacuum State*. Deep Beauty, pp.317-342.
- [7] Clifton, R. and Halvorson, H., 2001. *Entanglement and Open Systems in Algebraic Quantum Field Theory*. Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics, 32(1), pp.1-31.
- [8] Halvorson, H. and Clifton, R., 2000. *Generic Bell correlation between arbitrary local algebras in quantum field theory*. Journal of Mathematical Physics, 41(4), pp.1711-1717.
- [9] M. Headrick, *Lectures on entanglement entropy in field theory and holography*, [arXiv:1907.08126 [hep-th]].
- [10] Ryu, S. and Takayanagi, T., 2006. *Aspects of holographic entanglement entropy*. Journal of High Energy Physics, 2006(08), pp.045-045.
- [11] S.J. Summers and R. Werner, *The vacuum violates Bell's inequalities*, Phys. Lett., 110 A, 257–259 (1985).
- [12] S.J. Summers and R. Werner, *Bell's inequalities and quantum field theory*, I. General setting, J. Math. Phys., 28, 2440–2447 (1987).

- [13] S.J. Summers and R. Werner, *Maximal violation of Bell's inequalities for algebras of observables in tangent spacetime regions*, Ann. Inst. Henri Poincaré, 49, 215–243 (1988).
- [14] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki and K. Horodecki, *Quantum entanglement*, preprint quant-ph/0702225.
- [15] M. Keyl, *Fundamentals of quantum information theory*, Phys. Rep., 369, 431–548 (2002).
- [16] B.S. Cirel'son, *Quantum generalization of Bell's inequality*, Lett. Math. Phys., 4, 93–100 (1980).
- [17] Nishioka, T., 2018. *Entanglement entropy: Holography and renormalization group*. Reviews of Modern Physics, 90(3).